Mathematik

im

Grundkurs
des Herder-Gymnasiums

Stand: Aug. 2013

Grundkurs ma-1
(45 Stunden)

Lernabschnitte		Richtzeiten	Seite
1	**Ableitungsregeln, Funktionsuntersuchungen**	18 Stunden	3
2	**Trigonometrische Funktionen**	12 Stunden	4
3	**Integralrechnung**	15 Stunden	5

Grundkurs ma-2
(45 Stunden)

Lernabschnitte		Richtzeiten	Seite
1	**Exponential- und Logarithmusfunktionen**	24 Stunden	6
2	**Stochastik**	21 Stunden	7

Grundkurs ma-3
(45 Stunden)

Lernabschnitt		Richtzeiten	Seite
	Analytische Geometrie und Lineare Algebra	45 Stunden	8

Grundkurs ma-4
(**30** Stunden)

Lernabschnitte		Richtzeiten	Seite
1	**Stochastik**	12 Stunden	10
2	**Analysis**	9 Stunden	10
3	**Analytische Geometrie**	9 Stunden	10

ma-1: Ableitungsregeln, Funktionsuntersuchungen (18 Stunden)

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Die zur Ableitung ganzrationaler Funktionen notwendigen Ableitungsregeln kennen und damit ganzrationale Funktionen ableiten können.	Potenzregel, Summenregel, Konstantenregel der Ableitung.	Hier ist an die Ableitung einer Funktion an einer Stelle (Klasse 10) anzuknüpfen, an einen Neustart ist natürlich nicht gedacht.
Die Definition von (lokalen) Extrempunkten und von Wendepunkten kennen. Für (lokale) Extrempunkte und für Wendepunkte notwendige Bedingungen und hinreichende Bedingungen kennen.	Charakteristische Punkte von Funktionsgraphen. Notwendig für ein relatives Extremum einer Funktion f an der Stelle x_0 ist $f'(x_0)=0$; hinreichend ist z.B. $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)\neq 0$. Wendepunkte als lokale Extrempunkte der 1. Ableitungsfunktion.	saubere fachsprachliche Trennung von Funktionswert (z. B. relatives Maximum) und Punkt (z.B. lokaler Hochpunkt) Es ist unbedingt an einem Beispiel zu verdeutlichen, dass $f''(x_0)\neq 0$ allein <u>nicht</u> hinreichend für ein relatives Extremum von f an der Stelle x_0 ist! Auch die entsprechenden Vorzeichenwechselkriterien können und sollten betrachtet werden.
Charakteristische Punkte von Graphen ganzrationaler Funktionen bestimmen und damit den Funktionsgraphen skizzieren können. Extremwertprobleme, die auf ganzrationale Zielfunktionen führen, lösen können.	Untersuchung ganzrationaler Funktionen mittels Funktionsgleichungen: Bestimmen von Achsenschnittpunkten, Hoch-, Tief- und Wendepunkten; gegebenenfalls Symmetrie. einige Extremwertaufgaben; dabei exemplarisch auch Untersuchung von Zielfunktionen am Rande ihrer Definitionsmengen (absoluter Extremwert).	Anknüpfung an Klasse 10, hier aber durch Lösen von Gleichungen Die Anzahl der Aufgaben ist geeignet zu beschränken, da mit Einführung weiterer Funktionsklassen immer wieder Elemente der “Kurvendiskussion” auftreten werden.
Aus allgemeinen Funktionstermen ganzrationaler Funktionen und ihrer Ableitungsfunktionen bei vorgegebenen markanten Punkten spezielle Funktionsterme ermitteln können.	Konstruktion von Funktionstermen aus vorgegebenen Bedingungen durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.	Hier werden nur notwendige Bedingungen verwendet. Ggf. ist zu überprüfen, ob die ermittelte Funktion tatsächlich die vorgegebenen Eigenschaften hat.
Weitere Ableitungsregeln herleiten und anwenden können.	Kettenregel, Produktregel	Diese Regeln können bereits hier betrachtet werden, z. B. $f(x)=(x^2+5)^3$, oder im nächsten Abschnitt.

ma-1: Trigonometrische Funktionen (12 Stunden)

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Wissen und begründen können, dass $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$ gilt.	Ableitung der Sinus-und Kosinusfunktion.	Eine Vermutung kann jeweils durch graphisches Differenzieren gewonnen werden. Für den Nachweis können die benötigten Grenzwerte $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$ und $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0$ durch Testeinsetzungen plausibel gemacht werden. Eine der Ableitungen kann auch mit Hilfe der Kettenregel aus der anderen gewonnen werden.
Ableitungsregeln verständig anwenden.	Ableitungsübungen zur Kettenregel, z.B. $f(x) = 2\cdot\sin(4x-1)$, $f(x) = \cos(x^2)$ und zur Produktregel, Beispiele nicht schwieriger als $f(x) = \sin(x)\cdot(1+\sin(x))$, $f(x) = (\cos(x))^2$ ausgewählte Fragestellungen zur Funktionsuntersuchung, Extremwertaufgaben	Der Abschnitt dient der Festigung der Ableitungsregeln. An vollständige Kurvendiskussionen ist nicht gedacht.
Die Quotientenregel kennen und anwenden können.	Quotientenregel Ableitung der Tangensfunktion	Hier bieten sich als Beispiele auch gebrochenrationale Funktionen an. Eine umfassende Behandlung dieser Funktionenklasse ist aber nicht vorgesehen.

ma-1: Integralrechnung (15 Stunden)

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Für monotone Funktionen bei äquidistanter Intervallzerlegung Ober- und Untersummen angeben und graphisch veranschaulichen können. Flächeninhalte unter Graphen einfacher monotoner Funktionen berechnen können.	Approximation von Flächen unter Funktionsgraphen mit Hilfe von Rechtecken, Ober- und Untersummen Einschachtelung von Flächeninhalten durch Ober- und Untersummen, Flächeninhalt als innere Zahl einer Intervallschachtelung	Es bietet sich an, Bezüge zu Inhalten aus Klasse 9 herzustellen (Kreisfläche, Intervallschachtelung). Mit geeigneten Computerprogrammen kann die Einschachtelung veranschaulicht und können Näherungswerte berechnet werden. Den Nachweis einer Intervallschachtelung ersetzen sie aber nicht.
Eine Definition des bestimmten Integrals kennen. Bestimmte Integrale graphisch deuten können. Bestimmte Integrale ganzrationaler Funktionen auf konkreten Intervallen berechnen können.	das bestimmte Integral als Grenzwert von Ober- und Untersummen Rechenregeln für bestimmte Integrale: Linearität, Intervalladditivität Unterschied zwischen bestimmtem Integral und Flächeninhalt	Hier ist zunächst ein Grundverständnis ohne Bezug zur Differenzialrechnung intendiert. Konkrete Berechnungen sind mit Blick auf die zur Verfügung stehende Zeit zu beschränken. Hier bieten sich Anwendungsbezüge an, z.B. zur Physik.
Den Begriff der Stammfunktion kennen und in konkreten Fällen überprüfen können. Wissen und begründen können, dass sich verschiedene Stammfunktionen einer gegebenen Funktion nur durch einen konstanten Summanden (Verschiebung längs der y-Achse) unterscheiden.	Stammfunktionen von ganzrationalen Funktionen	Die Integrationsregeln ergeben sich unmittelbar aus den entsprechenden Ableitungsregeln. Der Bezug zum graphischen Differenzieren kann hergestellt werden.
Den Zusammenhang von Integralfunktion und Stammfunktion an konkreten Beispielen erläutern können. Die Formel $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ kennen und anwenden können. Flächeninhalte berechnen können.	Hauptsatz der Analysis: Integralfunktionen (Flächeninhaltsfunktionen) von (stetigen) Funktionen als Stammfunktionen das Integral als Differenz von Funktionswerten einer Stammfunktion Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe von Stammfunktionen Flächeninhalte, auch für Flächen zwischen Funktionsgraphen	Beweislücken wegen des fehlenden Begriffs Stetigkeit sind ggf. bewusst zu machen. Es kann auch sinnvoll sein, sich mit dem Entdecken des Zusammenhangs an konkreten Beispielen zu begnügen. Hier finden auch Anwendungsbezüge wie die Rekonstruktion eines Bestandes aus vorgegebenen Änderungsraten u.a. ihren Platz.
Bestimmte Integrale (z. B. Flächeninhalte) für einfache trigonometrische Funktionen berechnen können.	Integration vom sin und cos Integrale für Funktionen wie z.B. $f(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $f(x) = 2x + \cos(2x)$	Hier ist nicht an Integration durch Substitution gedacht. Eine Stammfunktion ergibt sich jeweils unmittelbar durch die Kettenregel.

ma-2: Exponential- und Logarithmusfunktionen (24 Stunden)

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Eigenschaften von Exponentialfunktionen kennen und anwenden können.	Exponentialfunktionen $\exp_a$, $a>0$, $a\neq 1$ Definitions- und Wertemenge, graphische Darstellung in Abhängigkeit von der Basis, Monotonie	Anknüpfung an Inhalte aus Klasse 10, sowie ggf. Aufarbeitung und Vertiefung
Exponentialfunktionen zu beliebigen Basen ableiten können.	Ableitung von Exponentialfunktionen, die Zahl **e** als ausgezeichnete Basis	Die benötigten Grenzwerte $\exp_a{}'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$ können zunächst näherungsweise mit dem Taschenrechner ermittelt werden.
Graphen von Umkehrfunktionen zeichnen können. Eigenschaften von Logarithmusfunktionen kennen.	Umkehrfunktion Logarithmus- und Exponentialfunktionen als gegenseitige Umkehrfunktionen ln als ausgezeichnete Logarithmusfunktion	Hier ist wieder an Inhalte aus Klasse 10 anzuknüpfen. Ein Neueinstieg ohne Bezug zu vorhandenem Vorwissen ist zu vermeiden.
Die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion kennen. Wissen, dass $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ gilt.	Ableitung der Umkehrfunktion Ableitung von ln	Die hier gewählte Reihenfolge von Lerninhalten stellt nur eine Möglichkeit dar. Alternative Zugänge sind zulässig.
Anwendungsaufgaben modellieren und lösen können.	Wachstum und Zerfall, u.a. - Funktionsterme aus vorgegebenen Wertetabellen gewinnen - Darstellung mit der Basis **e** - Halbwertszeit	
Funktionsuntersuchungen im Zusammenhang mit Exponential- und Logarithmusfunktionen durchführen können.	Kurvendiskussion, Beispiele wie $f(x) = x\cdot e^{-x}$, $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ und nicht komplexer als $f(x) = (x-2)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x}$.	Das Verhalten an Rändern des Definitionsbereichs ist durch Testeinsetzungen numerisch plausibel zu machen. An die Regeln von DE L'HOSPITAL oder unbegründete Aussagen zu "stärkerer Konvergenz" ist nicht gedacht.
Integrale mit Exponential-und Logarithmusfunktionen berechnen können.	Flächenberechnungen bei leicht bestimmbaren Stammfunktionen ohne Integrationsmethoden.	Für einzelne komplexere Funktionsterme sollte auch eine Stammfunktion vorgegeben und durch Ableiten bestätigt werden.

ma-2: Stochastik (21 Stunden)

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Die Definition eines bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßes kennen. Vierfeldertafel und Baumdiagramme zur Bestimmung bedingter Wahrscheinlichkeiten nutzen können. Ereignisse auf Unabhängigkeit prüfen können.	Bedingte Wahrscheinlichkeit: Anwendungsaufgaben unter Verwendung von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln Produktregel $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$ stochastische Unabhängigkeit	Grundlegende Begriffe können in diesem Abschnitt integrierend wiederholt werden.
Ein mehrstufiges Zufallsexperiment gegebenenfalls als BERNOULLIkette erkennen können. Die Binomialverteilung kennen und verständig anwenden können.	BERNOULLIkette als n-malige unabhängige Wiederholung eines Zufallsexperiments mit zwei Ergebnissen Binomialverteilung: $P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ kumulierte Wahrscheinlichkeitsmaße $P(X \leq k)$ unter Verwendung von Tabellen.	Durch zahlreiche Beispiele und Gegenbeispiele soll Verständnis für die charakteristischen Merkmale dieses Modells erzielt werden. Die Formel kann aus den Pfadregeln und kombinatorischen Überlegungen zu den Binomialkoeffizienten gewonnen werden.
Die strukturierende Wirkung einer Zufallsfunktion auf die Ergebnismenge eines Zufallsexperiments erläutern können. Die Definitionen für den Erwartungswert und die Standardabweichung einer Zufallsfunktion kennen und diese Parameter berechnen können.	Zufallsfunktionen (Zufallsgrößen), z.B. - Reingewinn bei einem Glücksspiel - Augensumme beim Würfeln - Anzahl der Erfolge in einer BERNOULLIkette Erwartungswert μ und Standardabweichung σ einer Zufallsgröße Zusammenhang mit empirischen Kenngrößen $\overline{x}$ und s , speziell $\mu = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ bei einer Binomialverteilung..	Als Beispiel kann der Einsatz für ein faires Spiel ermittelt werden. Die Formeln können durch Verallgemeinern von Beispielen gewonnen werden.
Graphische Darstellungen von Binomialverteilungen anfertigen können. Durch Experimentieren und Beobachten graphische Darstellungen von Binomialverteilungen interpretieren können.	Graphische Darstellung von Binomialverteilungen Gestalt der Binomialverteilung in Abhängigkeit von n (Länge der Kette) und p (Trefferwahrscheinlichkeit) Erwartungswert μ als Lageparameter und Standardabweichung σ als Streuungsparameter.	An dieser Stelle sollte möglichst ein Tabellenkalkulationsprogramm eingesetzt werden.

Bemerkung: In kurzen Sommerhalbjahren kann der Abschnitt über Zufallsfunktionen auch im 4. Semester unterrichtet werden. Dann entfallen die dort vorgesehenen Abschnitte zur Statistik.

ma-3: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (45 Stunden)

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Das Rechnen mit Vektoren zur Beantwortung geometrischer Fragestellungen nutzen. Mit Vektoren sicher rechnen.	Zusammenhang zwischen Punkten und Verschiebungen (Vektoren) ausgezeichneter Punkt (Ursprung), Koordinatensystem im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, Abstand zweier Punkte Einheitsverschiebungen längs der Achsen, Vektoren in Spaltendarstellung, Ortsvektor, Betrag eines Vektors Darstellung von Vektoren als Pfeile, Unterschied von Vektor (Verschiebung) und Pfeil (Repräsentant); Schrägbilder von Figuren und Körpern im Koordinatensystem Rechnen mit Vektoren – Addition, Nullvektor – Gegenvektor, Subtraktion – S-Multiplikation Anwendungen, z.B. Koordinaten – der Eckpunkte eines Parallelogramms – des Mittelpunktes einer Strecke – des Schwerpunktes eines Dreiecks.	- Punktepaar → Verschiebung - Punkt und Verschiebung → Bildpunkt - Addition von Verschiebungen Anknüpfung an Koordinatengeometrie aus der Mittelstufe An strukturelle Betrachtungen zum Vektorraum ist nicht gedacht. Die Übungen sollten hier keinesfalls umfangreich sein. Das Ziel des sicheren Rechnens wird im Laufe der gesamten Unterrichtseinheit erreicht.
Vektorielle Geradengleichungen analysieren und bestimmen. Rechnerisch überprüfen, ob ein vorgegebener Punkt auf einer Geraden liegt. Geometrische Fragestellungen modellieren und lösen.	Gleichungen einer Geraden in Parameterform im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ relative Lage von Geraden zueinander im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ – eindeutiger Schnittpunkt – Parallelität und Identität – windschiefe Geraden im $\mathbb{R}^3$ Anwendungen, z.B. – Gleichung einer Strecke durch Einschränkung der Definitionsmenge des Parameters, Teilverhältnis von Strecken – Diagonale in einer Raute und Winkelhalbierende.	Im Falle des $\mathbb{R}^2$ bietet sich ein Vergleich mit der Funktionsgleichung einer linearen Funktion an (Steigung). Bei der Untersuchung sind Lineare Gleichungssysteme zu lösen. Auch hier kann im Falle des $\mathbb{R}^2$ ein Bezug zu bekannten Unterrichtsinhalten hergestellt werden.
Vektorielle Ebenengleichungen analysieren und bestimmen. Rechnerisch überprüfen, ob ein vorgegebener Punkt in einer Ebene liegt . Eine Definition der linearen Unabhängigkeit kennen.	Gleichungen einer Ebene in Parameterform relative Lage einer Geraden und einer Ebene bzw. zweier Ebenen lineare Unabhängigkeit von 3 Vektoren im $\mathbb{R}^3$	Bei der Untersuchung sind lineare Gleichungssysteme von 3 Gleichungen in 2, 3 oder 4 Variablen zu lösen. Es empfiehlt sich die Verwendung des GAUß-Algorithmus.

Eine Definition für das Skalarprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ kennen. Winkelmaße berechnen. Rechengesetze für das Skalarprodukt anwenden. Wissen, dass alle Ortsvektoren, deren Pfeile die gleiche Projektion in einer vorgegebenen Richtung besitzen, mit dieser Projektion das gleiche Skalarprodukt ergeben.	Orthogonalität und Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ Das Skalarprodukt in den Formen $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$ und $\vec{a} \bullet \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))$; Winkel zwischen – “Richtungen” – Geraden Eigenschaften des Skalarprodukts – Rechengesetze – Projektion auf eine vorgegebene Richtung.	Die Anknüpfung an $m \cdot m^{\perp} = -1$ für orthogonale Geraden im $\mathbb{R}^2$ wird empfohlen. Die Äquivalenz kann über den Kosinussatz nachgewiesen werden. Es ist der jeweilige geometrische Sachverhalt zu berücksichtigen, keine kritiklose Verwendung von Formeln.
Normalenformen von Ebenengleichungen kennen und ineinander umwandeln können. Wissen, dass die (positive) Konstante in der HESSEschen Normalenform den Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung angibt.	Normalenformen einer Ebenengleichung – allgemeine Normalenform – HESSEsche Normalenform – Koordinatenform Abstand einer Ebene vom Koordinatenursprung, Abstand paralleler Ebenen, Abstand eines Punktes von einer Ebene Umwandlung einer Ebenengleichung von einer Parameterform in eine Normalenform und umgekehrt Abstand windschiefer Geraden.	Ein Normalenvektor kann über die Lösung eines LGS ermittelt werden.
Für sich schneidende Ebenen eine Gleichung der Schnittgeraden und das Maß des Schnittwinkels ermitteln. Für eine Gerade und eine Ebene, die sich in einem Punkt schneiden, die Koordinaten des Schnittpunktes und das Maß des Schnittwinkels ermitteln.	Relative Lage von Ebenen zueinander, insbesondere: Existenz einer Schnittgeraden, Schnittwinkel zweier Ebenen; Relative Lage von Gerade und Ebene, Schnittwinkel von Gerade und Ebene.	Für die Ermittlung einer Gleichung der Schnittgeraden empfiehlt es sich, dass eine Ebenengleichung in Normalenform, die andere in Parameterform gegeben ist.
Geometrische Fragestellungen modellieren und lösen.	Anwendungen, z.B. – Spiegeln eines Punktes an einer Ebene – Abstand eines Punktes von einer Geraden – Flächeninhalt eines Dreiecks – Volumen einer Pyramide.	Hier kann z. B. eine Gleichung der Lotgeraden zu einer Ebene bzw. der Lotebene zu einer Geraden durch einen Punkt ermittelt werden. Andere Verfahren sind natürlich möglich.
Die relative Lage von Kugeln, Geraden und Ebenen untersuchen.	Gleichung einer Kugel in der Form $(\vec{x}-\vec{m})\bullet(\vec{x}-\vec{m}) = r^2$; Relative Lage von Kugel und Gerade, Schnittpunkte Relative Lage von Kugel und Ebene, Tangentialebenen.	An die Bestimmung von Gleichungen für Schnittkreise ist nicht gedacht.

ma-4: Stochastik (12 Stunden)

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Wahrscheinlichkeiten für Streuungsintervalle um den Erwartungswert einer Binomialverteilung experimentell ermitteln.	$k\cdot\sigma$-Intervalle um den Erwartungswert μ einer Binomialverteilung, k=1, 2, 3 Sicherheitswahrscheinlichkeiten 68%, 95,5%, 99,7% für große n	Die Sicherheitswahrscheinlichkeiten ergeben sich unter der LAPLACE-Faustregel als Erfahrungstatsachen aus Beispielen.
Vorhersagen für die Anzahl der Erfolge bei großem n und bekanntem p treffen.	Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe , signifikante Abweichungen Anwendungen, z.B. – Güte von Wahlumfragen – voraussichtliche Anzahl stornierter Buchungen.	Das 2σ-Intervall liefert ein Signifikanzniveau von etwa 5%.
	Komplexe Übungsaufgaben aus größeren Zusammenhängen.	Hier ist insbesondere auch das Textverständnis zu beachten.

Bemerkung: Der im Plan des 2. Semesters beschriebene Abschnitt über Zufallsfunktionen kann bei Zeitmangel auch hier unterrichtet werden. Dann entfallen die Abschnitte zur Statistik.

ma-4: Analysis (9 Stunden)

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
Problemstellungen in Anwendungssituationen modellieren und lösen.	Untersuchung zusammengesetzter und verketteter Funktionen unter Berücksichtigung von – ganzrationalen Funktionen – trigonometrischen Funktionen – Exponentialfunktionen Wachstums- und Zerfallsprozesse mit linearen Funktionen, Exponentialfunktionen und Potenzfunktionen.	
	Komplexe Übungsaufgaben aus größeren Zusammenhängen.	

ma-4: Analytische Geometrie (9 Stunden)

Unterrichtsziele	Unterrichtsinhalte	Erläuterungen
	Komplexe Übungsaufgaben aus größeren Zusammenhängen in Anwendungssituationen.	